

Matemática e Música: em busca da harmonia

** Monografia apresentada por Larissa Suarez Peres
na Universidade do Grande ABC*

1. Introdução: escalas musicais e relações matemáticas

Do ponto-de-vista acústico, os sons utilizados para produção de música (excetuando os sons de alguns instrumentos de percussão) possuem determinadas características físicas, tais como oscilações bem definidas (frequências) e presença de harmônicos. Entende-se, no caso, por oscilações bem definidas o fato de que um som musical, na grande maioria das vezes, ocorre de forma sustentada (pouco ou muito), de maneira que sua característica de oscilação se mantém por alguns ou muitos ciclos, diferentemente dos ruídos e outros sons não musicais.

No que diz respeito à presença de harmônicos cabe lembrar que a maioria dos sons musicais não ocorre apenas em seu modo mais simples de vibração (modo fundamental), pois são compostos sempre deste modo (fundamental) e de mais outros, chamados de modos harmônicos, que nada mais são do que o corpo vibrante oscilando também com frequências múltiplas inteiras ($x2$, $x3$, $x4$, etc) da frequência do modo fundamental.

Os harmônicos presentes em um som são componentes extremamente importantes no processo musical, tanto na formação das escalas musicais, como na harmonia musical. Por causa dessas características naturais, sons com alturas (frequências) diferentes, quando postos a ocorrer ao mesmo tempo, podem criar sensações auditivas esteticamente diferentes.

Em uma primeira análise, podemos entender que dois sons que mantêm uma relação inteira entre os valores de suas frequências fundamentais certamente resultarão em uma sensação auditiva natural ou agradável, pelo fato de seus harmônicos estarem em "simpatia" ou "consonância". No caso específico em que a frequência fundamental de um som (f_1) é o dobro da frequência fundamental de outro (f_2), diz-se que o primeiro está uma oitava acima do segundo ($f_1=2 \cdot f_2$).

Se quisermos gerar dois sons musicais diferentes, que sejam perfeitamente consonantes, estes deverão manter uma relação de oitava, onde todos os harmônicos do som mais alto estarão em perfeita consonância com o som mais baixo. No entanto, sons gerados simultaneamente em alguns outros intervalos diferentes da oitava podem produzir sensação agradável aos nossos ouvidos, por conterem também uma boa parte de harmônicos coincidentes, que na realidade é o intervalo chamado de quinta, e que mantém uma relação de 3:2.

É claro que se fossem utilizados somente os intervalos de oitava e de quinta para criar sons em música, o resultado seria bastante pobre pela escassez de notas. Assim, várias civilizações procuraram desenvolver, científica e experimentalmente, gamas de frequências dentro do intervalo de oitava, com as quais pudessem construir suas músicas. A essas gamas dá-se o nome de escalas musicais, e há uma variedade delas, baseadas em critérios diferentes para a definição das notas.

**Intervalo
Relação**

terça menor
terça
quarta
quinta
sexta menor
sexta
oitava
6:5 (1,200)
5:4 (1,250)
4:3 (1,333)
3:2 (1,500)
8:5 (1,600)
5:3 (1,667)
2:1 (2,000)

Intervalos consonantes

Além da oitava e da quinta, outros intervalos de sons também são considerados esteticamente consonantes pela maioria dos autores, e estão apresentados na tabela acima. Cabe ressaltar que os intervalos em questão foram representados por suas relações matemáticas no que diz respeito à relação harmônica.

Tomemos como exemplo o caso do intervalo de quinta: sua frequência é igual à frequência do terceiro harmônico da nota de referência (três vezes a frequência da fundamental), e é dividida por dois, de forma a abaixar uma oitava, para cair dentro da mesma oitava da nota de referência, daí a relação 3:2.

Os harmônicos de uma nota musical são precisamente esses sons parciais que compõem sua sonoridade, e a Série Harmônica desta mesma nota caracteriza-se pela seqüência de tais sons ordenada do grave ao agudo. A sonoridade de um instrumento ou de uma voz humana apresenta-se tanto mais brilhante quanto maior sua riqueza em harmônicos superiores, aquilo que nos faz atribuir adjetivos ao som produzindo por determinados instrumentos associa-se diretamente à distribuição dos harmônicos daquele som.

Com relação à produção e uso de harmônicos, os executantes de instrumentos de sopro podem obter o harmônico seguinte à fundamental bem como o posterior a este soprando seus instrumentos com maior intensidade, assim como os instrumentistas de corda produzem harmônicos tocando uma corda levemente em pontos adequados, o que a faz vibrar em determinadas seções associadas ao harmônio que se deseja evidenciar.

Qualquer movimento vibratório de ar na entrada do ouvido corresponde a um tom musical que pode ser sempre e de maneira única exibido como uma soma de um número infinito de movimentos vibratórios simples, correspondendo aos sons parciais deste tom musical. As primeiras componentes na Série Harmônica correspondem às frequências associadas aos primeiros termos da Série de Fourier que determinam portanto razões de pequenos números inteiros relacionados às consonâncias pitagóricas, tanto uma corda como colunas de ar em instrumentos de sopro possuem a característica de vibrar não apenas como

um todo, mas ainda simultaneamente como duas metades, três terços, quatro quartos e etc.

Do ponto de vista matemático, observa-se que a força de cada harmônico contribuirá para a construção da forma da vibração periódica que se relaciona com o timbre do som.

Nos instrumentos musicais, exploram-se e utilizam-se harmônicos de diversas maneiras, os instrumentos de sopro obtêm harmônicos de um determinado som soprando-o com maior intensidade, enquanto que os executantes de instrumentos de corda podem fazer uma única corda vibrar em seções correspondentes a determinado harmônicos, tocando levemente em pontos de máximo que inibem harmônicos inferiores.

2. Origem da Matemática e da Música

Em quase todos os povos da Antiguidade encontram-se manifestações destes dois campos em separados. O poder conquistador da música já se expressa na mitologia grega em Orfeu, cujo canto acompanhado de lira sustava os rios, amansava feras e movia pedras. A matemática também se faz presente desde os tempos mais remotos, por exemplo na contagem das coisas. A interação entre essas áreas torna-se fortemente manifesta a partir da necessidade de equacionar e solucionar problemas da consonância, no sentido de buscar fundamentos científicos capazes de justificar tal conceito.

Com relação à organização de escalas musicais, esta ocorreu de diversas maneiras em diferentes povos e épocas, porém com alguns aspectos em comum.

Os gregos desenvolveram os tetracordes e depois escalas com sete tons.

Teóricos musicais como Pitágoras, Arquitas, Aristoxeno, Erastóstenes se dedicaram à construção de escalas desenvolvendo diferentes critérios de afinidade. Por exemplo, valorizando os intervalos de quinta perfeitas, bem como a utilização somente de números de 1 a 4 na obtenção das frações da corda para gerar as notas da escala, Pitágoras estabeleceu uma afinação utilizando percursos de quinta para a obtenção das notas da escala.

Arquitas constrói sua escala baseada em frações da corda resultantes de medias harmônicas e aritméticas daquelas encontradas por Pitágoras no experimento do monocórdio. Já Erastóstenes elaborou a diferenciação entre intervalos calculados aritmeticamente a maneira de Aristoxeno, de intervalos calculados pela razão.

2.1. O experimento do monocórdio e a música na escola pitagórica

Os primeiros sinais de casamento entre a matemática e a música surgem no século VI a.C. quando Pitágoras através de experiências com sons do monocórdio, efetua uma de suas mais belas descobertas, que dá à luz, na época, ao quarto ramo da matemática: a música.

Os principais teóricos musicais da escola Pitagórica foram Pitágoras e Filolau no período pré-clássico, bem como Arquitas, Aristoxeno e Aristóteles no período clássico.

Possivelmente inventado por Pitágoras, o monocórdio é um instrumento composto por uma única corda estendida entre dois cavaletes fixos sobre uma prancha ou mesa possuindo, ainda, um cavalete móvel colocado sob a corda estendida e a altura musical do som emitido quando tocada. Pitágoras buscava relações de comprimentos – razões de números inteiros – que produzissem determinados

intervalos sonoros. Deu continuidade a seus experimentos investigando a relação entre o comprimento de uma corda vibrante e o tom musical produzido por ela. Este experimento de Pitágoras é a primeira experiência registrada na história da ciência, no sentido de isolar algum dispositivo para observar fenômenos de forma artificial.

Pitágoras observou que pressionando um ponto situado a $\frac{3}{4}$ do comprimento da corda em relação a sua extremidade – o que equivale a reduzi-la a $\frac{3}{4}$ de seu tamanho original – e tocando-a a seguir, ouvia-se uma quarta acima do tom emitido pela corda inteira. Exercida a pressão a $\frac{2}{3}$ do tamanho original da corda, ouvia-se uma quinta acima e a $\frac{1}{2}$ obtinha-se a oitava do som original.

A partir desta experiência, os intervalos passam a denominar-se consonâncias pitagóricas. Assim, se o comprimento original da corda for 12 e se a reduzirmos para 9, ouviremos a quarta, para 8, a quinta, para 6, a oitava.

A descoberta desta relação entre razão de números inteiros e tons musicais mostrou-se significativa naquela ocasião, assim a partir deste experimento, Pitágoras estabeleceu relações entre a matemática e a música associando respectivamente, aos intervalos musicais referentes às consonâncias perfeitas. Essas correspondem às frações de uma corda que fornecem as notas mais agudas dos intervalos referidos, quando se produz a nota mais grave pela corda inteira.

Este descobrimento de intervalos consonantes deve-se a Pitágoras, embora provavelmente estes já fossem conhecidos desde muito antes em distintas culturas antigas.

O pensador de Samos justificou a subjacência de pequenos números inteiros as consonâncias pelo fato de que os números 1, 2, 3 e 4 geravam toda a perfeição. Os pitagóricos consideravam o número quatro como a origem de todo o universo, todo o mundo material, representando a matéria em seus quatro elementos: o fogo, o ar, a terra e a água. A importância deste número para os pitagóricos emerge ainda no cenário musical ao considerar o tetracorde – o sistema de quatro sons, cujos extremos encontravam-se a um intervalo de quarta justa.

Influenciada pela cultura oriental, a doutrina pitagórica sustentava que “Tudo é número e harmonia”. Assim os pitagóricos acreditavam que todo o conhecimento reduzir-se-ia a relações numéricas, posicionando-as como fundamento da ciência natural.

Os intervalos apresentam-se consoantes, isto é entoavam naturalmente, tornava-se interessante estabelecer afinações que contivessem tais intervalos denominados puros. Partindo do pressuposto de que a oitava mostrava-se como intervalo fundamental, os pitagóricos a tomam como universo da escala, o problema do estabelecimento de uma escala reduzia-se a dividir a oitava em sons que determinassem o alfabeto através do qual a linguagem musical pudesse se expressar, tornando-se, portanto natural a partir de uma nota - determinante da oitava universo juntamente com sua oitava superior - caminhar em intervalos de quintas ascendentes e descendentes, retornando à nota equivalente – acrescida ou diminuída de um número inteiro de oitavas-sempre que escapasse da oitava-universo.

As distintas oitavas reduzem-se apenas a uma, possuindo portanto cada nota equivalente em todas as outras oitavas, e particularmente naquela referencial,

quando se atinge uma nota qualquer na construção de escalas, seu significado é a sua posição relativa à nota mais grave da oitava em que se encontra.

2.2. O legado musical de Arquitas de Tarento

Um dos mais importantes musicais do período clássico grego, Arquitas de Tarento colaborou de maneira significativa não somente para o desenvolvimento da música, mas para o desvendar de seus fundamentos racionais. Arquitas atribuiu mais atenção acreditando que a música deveria assumir um papel mais importante que a literatura na educação das crianças. Para os pitagóricos, a teoria musical dividia-se no estudo da natureza das propriedades dos sons, no estabelecimento e no cálculo respectivamente de intervalos musicais e proporções musicais.

Escreveu trabalhos científicos principalmente relacionados, sem deixar de dedicar-se aos dois primeiros, especialmente no que concerne a consonâncias. Entre suas contribuições, modificou a antiga denominação da média subcontrária para média harmônica, provavelmente pelo fato do comprimento relativo ao intervalo de quinta – da corda inteira – de grande valor harmônico para os gregos, ser a média subcontrária entre o comprimento da corda solta – inteira - e aquele correspondente à oitava – metade da corda, intervalo consonante fundamental. Segundo Arquitas, as consonâncias são produzidas por dois ou mais sons simultâneos percebidos como apenas um, portanto o problema não concerne ao fenômeno em si, mas sim a sua percepção, o que o levou a pensá-lo como um problema do sujeito.

Com respeito a teorizações sobre a natureza do som, Arquitas atribui – na linguagem da época – diferenças de tom a variações dos movimentos resultantes do fluxo que causa o som. Sons diferenciam-se de acordo com suas velocidades no meio, de modo que o agudo dependia de uma velocidade mais alta que o grave. Ele ilustrava a afirmação precedente com um exemplo de uma propagação provocada por um vento forte, que produzia um som agudo em contraposição a outra produzida por um som grave.

Arquitas generalizou tal processo calculando analogicamente o comprimento da corda correspondente a um intervalo de terça maior acima de uma determinada nota como a média harmônica entre o comprimento gerador de tal nota e aquele que produzia uma quinta acima.

Cabe ressaltar que o intervalo de terça maior obtido por Arquitas concorda com aquele presente na Série Harmônica. Tal fenômeno nos leva a imaginar que Arquitas possuísse um ouvido sensível ao perceber que a terça correspondente a $(4/5)$ – mais baixa que pitagórica, $(64/81)$ – soava mais natural, uma vez que se fundia exatamente dentro dos harmônicos naturais de uma nota. Enquanto Pitágoras calcula frações subjacentes à escala utilizando apenas percursos de quintas, Arquitas considera fortemente cálculos de médias aritméticas e harmônicas na geração de seu sistema musical. Redistribuiu as relações de comprimentos subjacentes à escala pitagórica, obtendo diferentes frações tais como $(4/5)$ correspondente ao intervalo de terça, outrora associado a $(64/81)$ por Pitágoras.

Como já mencionado, Arquitas desenvolveu uma teoria para a natureza do som com implicações imediatas em música, na qual relacionou força e velocidade som altura musical – quanto mais forte e rápido um movimento, mais agudo o som produzido. Considerar o ar como elemento fundamental evidenciava a

centralização do interesse pelo meio de propagação sonora por parte do tarentino, que afirmava haver maior compressão de ao emitir-se um som mais forte. Tal afirmação destituiu as qualidades inerentes ao instrumento e suas possibilidades acústicas, do foco das atenções no estudo do que hoje se chama acústica, rumo à compreensão de como o som transportava-se.

Induzido pela observação de que se produzia uma mesma nota por distintos valores de comprimentos, tensões ou de capacidades diversas, Arquitas viu-se obrigado a abandonar a teoria pitagórica tradicional, lançando-se à busca teórica de um princípio que explicasse a essência do som, independentemente da estrutura do corpo ressonante.

Representando uma significativa contribuição do pitagorismo, os estudos acústicos do pensador tarentino infelizmente não prosperaram, vindo a ser retomado somente na Modernidade, quando teve início o desenvolvimento da acústica moderna.

3. Breve panorama da música na Idade Média

Neste período, houve a forte contribuição do cidadão romano e escritor Boetius (480-524 d.C.) para a sistematização da música ocidental. O pensador romano publicou em cinco volumes o *De Institutione Musica*, em que considera a música uma força que impregnava todo o universo e um princípio unificador tanto do corpo e alma do homem quanto das partes de seu corpo. Seu tratado apoiasse na doutrina pitagórica das consonâncias, e faz uso da matemática para racionalizar as consonâncias musicais e o princípio da divisão do monocórdio.

Desenvolvido no século VIII e IX d.C., o Cantochão apresenta-se com uma das formas musicais reconhecidas entre as mais antigas, consistindo de uma única melodia limitada pelo intervalo de uma oitava. Embora documentos e fatos anteriores ao século IX revelem alguns rudimentos de harmonia, o homem cantou e tocou em uníssono durante séculos. Por volta do século IX, começaram a aparecer o que se poderia chamar as primeiras músicas polifônicas, denominadas em sua forma mais antiga de *Organum Paralelo*.

Nos dois séculos seguintes, o canto evoluiu para o *Organum Livre*. Nessa época, cabe ressaltar a importância do pedagogo e teórico musical Guido d'Arezzo (955-1050 d.C.) que, utilizando novos métodos de notação e ensino, exerceu papel decisivo na constituição de nossa teoria musical. Escreveu o *Micrologus* – primeiro tratado completo sobre prática musical – que incluindo uma discussão sobre a música Polifônica e o Cantochão, desenvolvia, entre outros, uma técnica de canto à primeira vista baseada nas sílabas ut, re, mi, fá, sol, lá – nome das notas musicais empregado atualmente em grande parte do mundo.

No *Organum Livre*, a voz organal liberta-se da trajetória paralela para navegar em movimentos contrários, oblíquos e diretos. Essa forma perdura até o começo do século XII, quando se abandona o estilo nota contra nota para assumir o *Organum Melismático*, onde se encontra a voz principal, sustentando notas longas, enquanto outra voz desenvolvia-se livremente com notas de menos valor, o que significa ainda diversificação rítmica.

No século XIII, as notas das *clausulae* passam a utilizar palavras independentes do texto, dando origem a um tipo de música popular chamada moteto, onde uma terceira voz – *triplum* – entra em cena munida de palavras completamente independentes, por vezes em outras línguas.

4. Contribuições para a Ciência/Música a partir do Renascimento

Do ponto de vista musical, o Renascimento caracteriza-se pela evolução da polifonia – superposição de melodias – e conseqüente desenvolvimento da harmonia. Realizando especulações matemáticas concernentes a esta área em seu *Musica Teórica*, Ludovico Fogliani (1470-1539) forneceu fortes subsídios para que Gioseffe Zarlino (1517-1590) – um dos maiores teóricos musicais da época – organizasse em sua obra *Instituzioni Armonique* (1558) a base da educação científico-cultural em toda Europa durante dois séculos.

Dando continuidade ao teórico mencionado, encontra-se o espanhol Francisco Salinas (1513-1590), bem como o padre e matemático francês Marin Mersenne (1588-1648) que, dedicando-se ainda à acústica, apresenta-se como o primeiro teórico a fundamentar o estudo de harmonia no fenômeno da ressonância.

Mantendo correspondências assíduas com René Descartes (1596-1650), Mersenne discutiu problemas e aspectos pouco claros do *Compedium Musicae* escrito pelo filósofo francês em 1618. Descartes estabeleceu no compêndio referidos conceitos estéticos de influência marcante ao *Tratado de harmonia*, escrito por Jean Philippe Rameau (1683-1764) cem anos mais tarde.

Modificando substancialmente a concepção pitagórica, Galileu Galilei escreveu em 1638 que nem o comprimento, nem a tensão e nem a densidade linear de cordas apresentava-se como razão direta e imediata subjacente a intervalos musicais, mas razões dos números de vibrações e impactos de ondas sonoras que atingiam o tímpano. Considerando o som que alcançava o ouvido invés do objeto vibrante que o produzia, Galileu verificou que a altura musical relacionava-se diretamente à freqüência registrando rastros de arranhões desenhado numa placa metálica provenientes de uma haste vibrante solidária a uma membrana que recebia vibrações sonoras.

A percepção por parte de Galileu no século XVII de que a sensação de altura musical relaciona-se diretamente ao conceito de freqüência marca o início da física da música em sua concepção atual. Tal idéia motivou esforços para o entendimento dos harmônicos musicais, já que durante este século parecia paradoxal – a princípio por parte de Mersenne – que um simples objeto pudesse vibrar simultaneamente em diferentes freqüências. Os fundamentos desta idéia, por meio de fórmulas matemáticas demonstrativas concretizou-se mais tarde através de Newton, Laplace e Euler. A passagem do conceito de vibração ao de onda ocorreu na associação daquela à velocidade de propagação, gerando ondas progressivas.

Classificado como onda, o som ganhou uma nova dimensão que possibilitou seu estudo à luz da teoria ondulatória desenvolvida por Huygens (1629-1695), ponto significativamente estratégico na interação da matemática com a música na medida em que, compreendendo a natureza do som, torna-se possível entender, representar e manipular melhor os fenômenos musicais.

O ceticismo ao dogmatismo aritmético pitagórico em música desencadeou o interesse pelos determinantes físicos da altura musical no final do século XVI e princípio do século XVII. Tal postura manifesta-se, quando Vincenzo Galilei levantou o então paradoxo de que várias frações poderiam associar-se a um determinado intervalo.

A resolução da ambigüidade apresentada por Vincenzo Galilei encontra-se em seu filho Galileu (1564-1642) que modificou o referencial sonoro de até então, ao

considerar em sua análise o som que atingia o ouvido ao invés do objeto vibrante que o produzia. Galileu explicou a consonância/dissonância de alguns intervalos ao escrever em 1638 que a explicação direta e imediata subjacente aos intervalos musicais não era o comprimento da corda, nem a tensão a que se encontrava sujeita, nem a sua espessura, mas sim a razão do número de vibrações e impactos de ondas de ar que batiam diretamente no ouvido.

Afirmou que o grau de consonância produzido por dois tons associava-se à proporção de impactos do som mais agudo que coincidia com aqueles resultantes do som mais grave. Que a frequência produzida por uma corda tensionada era inversamente proporcional à raiz quadrada da densidade linear de tal corda, fato corroborado e generalizado por Mersenne ao determinar, por meio de experimentos envolvendo cordas densas e de mais de 30 metros, outros parâmetros dos quais a frequência de vibração de uma corda ainda dependiam. Uma das maiores questões que vinha acompanhando a acústica musical até então se referia ao mistério dos harmônicos do som. O matemático francês percebeu a importância dos harmônicos, requisitando seus inúmeros correspondentes a procurar uma explanação para tal fenômeno.

No que concerne a harmônicos, Fotenelle referiu-se à idéia subjacente ao princípio da superposição quando afirmou que cada metade, cada terço e cada quarto de uma corda de instrumento realizava suas vibrações parciais ao mesmo tempo que a corda inteira vibrava. A relação ciência/música encontra ainda ressonância na genialidade do matemático francês Joseph Saveur (1653-1716) que, apesar de ter sido surdo e mudo, descobriu pela primeira vez um meio de calcular o número absoluto de vibrações de um som. Considerado muitas vezes o pai da acústica, foi o primeiro a calcular a frequência dos batimentos produzida por duas notas.

O matemático francês percebeu que os construtores de órgão haviam descoberto intuitivamente os harmônicos, misturando-os por meio de registros com o intuito de obter distintos timbres. Os organistas misturavam os botões do órgão quase que da mesma maneira com que pintores misturam cores, imitando a harmonia da natureza observada nos objetos sonoros.

Entre os contribuintes para a relação matemática/música no século XVIII, encontram-se Leonhard Euler (1707-1783), Jean Lê Rond d'Alembert (1717-1783) e Daniel Bernoulli (1700-1782). Segundo Euler, o ouvido tendia a simplificar a razão percebida, especialmente quando tons dissonantes seguiam-se após uma progressão harmônica.

A conexão mais precisa entre altura de som musical e frequência – velocidade de um movimento vibratório – ocorreria no século XVIII com D'Alembert. Ele afirmou que um som natural não era puro, mas complexo, sendo obtido pela superposição de diversos harmônicos de uma série. Um harmônico caracterizava-se pela sua amplitude, que assume grande importância na síntese sonora.

Daniel Bernoulli afirmou que a vibração de um corpo sonoro poderia ser observada com superposição de seus modos simples como distintas amplitudes, porém não havia princípios gerais sobre os quais a prova de tal afirmação poderia ser experimentada. Esta afirmação de Bernoulli ancorou-se teoricamente nos experimentos de Fourier em área aparentemente distantes do universo musical. Nas primeiras décadas do século XIX, Fourier mostrou como representar qualquer

curva periódica pela superposição de ondas senoidais correspondentes às frequências 1, 2, 3, 4 vezes a frequência da curva original.

O teorema de Fourier, não apenas concretizou o ponto de vista de Daniel Bernoulli em acústica, como se transformou no fundamento para análises de harmônicos, consonância/dissonância, batimentos dissonantes, assim como distintos conceitos musicais aparentemente dissociados da matemática.

4.1. A Contribuição matemático-musical de Gioseffo Zarlino

Teórico e compositor italiano de Chioggia – Zarlino integrou teoria e prática, como modelo para seus escritos. Preocupando-se com a razão das consonâncias perfeitas, Zarlino mostra-se pioneiro no reconhecimento da tríade em termos harmônicos enquanto falava-se apenas em intervalos; na elaboração de uma explicação racional da antiga regra que proibia a utilização de quintas e oitavas paralelas assim como no reconhecimento da antítese menor/maior.

Acreditando que a música possuía a capacidade de provocar o bem e o mal, o compositor italiano concordava com Platão ao se preocupar com uma utilização prudente dessa arte. Embora nem sempre ressonantes conceitualmente com a perspectiva teórica de Zarlino, as concepções pitagórico-platônicas e humanistas – mais particularmente a numerologia – forneceram subsídio para que o compositor italiano estabelecesse critérios de utilização de consonâncias e de procedimentos musicais próprios e impróprios em nível geral relacionando, por exemplo, intervalos consonantes com razões simples.

Segundo Zarlino, a perfeita harmonia consistia em diversidade, relutante de elementos distintos entre si, discordantes e contrários possuindo em suas partes, proporções, movimentos e distâncias variadas em relação às regiões graves e agudas. Compara a música à natureza e afirma que a verdade e excelência dessa admirável e útil advertência são confirmadas pelos fenômenos da natureza, pois gerando indivíduos de uma mesma espécie, ela os faz similares uns aos outros, mas diferentes em alguns aspectos particulares, uma diferença ou variedade que proporcionam maior prazer aos nossos sentidos.

Apoiado na antiga doutrina de médias harmônicas e aritméticas, Zarlino revelou preferência pela terça maior frente a menor, uma vez que se obtinha essa última pela média aritmética dos comprimentos que produziam as notas componentes do intervalo de quinta, enquanto que à terça maior subjazia a fração obtida pela média harmônica dos comprimentos inerentes às notas componentes do mesmo intervalo.

Diferentemente de Pitágoras – que gerava intervalos por superposições de quintas – e assim como outros teóricos de sua geração, Zarlino obtinha intervalos dividindo-os adicionando-os e subtraindo-os, mas nunca invertendo-os. Zarlino explicou a propriedade consonante das sextas como superposição dos intervalos de quarta perfeita e terça e não como inversão das terças, o que só viria a ocorrer a partir do início do século XVII, quando teóricos passaram a utilizar explicitamente tal procedimento. O compositor italiano e seus predecessores compreendiam dissonâncias como cortes momentâneos no processo consonantes que, produzindo variedade, enfatizavam a perfeição das consonâncias.

Zarlino defende ainda que toda harmonia – composição e contraponto – devem constituir-se principalmente de consonâncias, utilizando-se dissonâncias apenas secundariamente e incidentalmente em nome da elegância e da beleza.

Nesse ponto, o compositor italiano estabeleceu um forte elo entre poetas, músicos e pintores que, adaptando ou pretendendo pintar histórias ou fábulas como melhor lhes pareciam, adequava as figuras, arranjando-as em sua composição. Portanto, ele não hesitava em colocar uma consonância num determinado lugar, assim que observava a ordem original da história ou fábula que tentava representar. Além disso, inúmeros pintores retrataram um simples assunto de muitas maneiras. O músico também deveria procurar variedade no seu contraponto sobre o sujeito, e se ele pudesse inventar muitas passagens, deveria escolher aquela que fosse melhor, mais adequada a sua proposta e mais capaz de tomar seu contraponto sonoro e ordenado.

4.2. A ciência/música em Mersenne

Matemático, filósofo e músico teórico, Marin Mersenne (1588-1648) apresenta-se como um dos principais pensadores franceses do século XVII, cuja obra – a maior parte dedicada à ciência, teoria e prática de música – assume papel central nos movimentos científicos e acadêmicos da época. Mersenne transitou na confluência entre o Renascimento e o Barroco na França como personagem, cuja obra assumiu importante papel nos desenvolvimentos futuros da matemática/música. Acreditando que a música era passível de análise e explicação racional, Mersenne atribuía importância a tal ciência – quando comparada a outras disciplinas – como área de pesquisa científica.

Sob uma ótica matemático-acústico-musical, Mersenne levantou questões cruciais, tais como a paradoxalidade aparente em uma nota vibrar em várias frequências ao mesmo tempo, sugerindo estudos mais criteriosos concernentes aos harmônicos. Embora o matemático francês fosse compositor, ele estabeleceu uma teoria baseada na prática, por exemplo, ao defender e fundamentar um temperamento igual na construção de instrumentos e ao explicar racionalmente as afinações.

A partir de 1630, seus escritores adquirem novas formas e interesses, culminado com a elaboração da Harmonie Universelle em 1636, cuja abordagem teórico-prática abarca relatos de distintos experimentos engenhosos, estudos sobre o som e reflexões concernentes à relação matemática/música que o faz muitas vezes ser considerado o pai da acústica. Variando os comprimentos e tensões, Mersenne verificou que, para frequências visualizáveis, a vibração de um fio esticado era inversamente proporcional ao comprimento da corda se sua tensão fosse constante; diretamente proporcional à raiz quadrada da tensão, se o comprimento da corda fosse constante e inversamente proporcional à raiz quadrada da massa por unidade de comprimento, para fios diferentes de mesmo comprimento e sujeitos à mesma tensão.

Para Mersenne, a média aritmética possuía caráter superior a harmônica, pois tomando números proporcionais às vibrações – causas primeiras do som -, a quinta na posição inferior resultava da média aritmética dos números que caracterizam a oitava. Mersenne descobriu, aplicando seus princípios, que a relação da frequência entre uma nota e sua oitava era respectivamente de 1 para 2, explicando ainda as características de colunas vibrantes de ar, bem como os fenômenos do eco e da ressonância. Foi ainda, o primeiro a determinar a frequência de uma nota musical estabelecida, bem como a velocidade de propagação do som no ar.

Mersenne considerava o monocórdio como suporte fundamental à compreensão não somente dos instrumentos de corda, mas de toda ciência musical, revela certa preocupação com o Temperamento quando divide a oitava em 12 iguais, obtendo nesse último caso o monocórdio harmônico da igualdade composto por 11 números irracionais resultantes de médias proporcionais.

4.3. Kepler e a música dos planetas

Matemático, astrônomo e filósofo nascido em Weil, Johannes Kepler (1571-1630) apresentou, fortes subsídios para a ciência musical. Em 1601, Kepler assumiu seu posto trabalhando na organização de calendários e na predição de eclipses como matemático e astrônomo da corte do imperador Rudolfo II em Praga até 1612, estabelecendo-se mais tarde em Linz, onde concluiu e publicou seu *Harmonices Mundi* em 1619. Principal contribuição do astrônomo alemão à teoria musical, essa obra compõe-se de 5 livros – os dois primeiros relacionam a origem das 7 harmonias com arquétipos inerentes à geometria e a Deus; o livro 3 apresenta um tratado sobre consonância e dissonância, intervalos, modos, melodia e notação; o livro 4 discorre sobre astrologia enquanto que o volume 5 aborda a Harmonia das Esferas.

Kepler julgou insatisfatória a experiência de Pitágoras com o monocórdio para o estabelecimento de intervalos consonantes. Acredita que possivelmente tal postura teria levado os pitagóricos à desconsideração dos intervalos de terças e sextas com consonâncias, reproduzindo o experimento do monocórdio com um maior número de repartições da corda.

Defendia a existência, conhecia desde os antigos, de escalas musicais peculiares a cada planeta, que soavam como se estes cantassem simples melodias, relacionando para isso velocidades dos planetas às frequências emitidas.

Considerava os movimentos dos planetas uma música que traduzia a perfeição divina. Assim tentou explicar a variação de velocidade de um planeta por uma metáfora musical. Admitindo que movimentos rápidos e lentos associavam-se respectivamente a notas agudas e graves em sua construção imaginativa, o astrônomo alemão considerou que a razão das velocidades extremas determinaria um intervalo musical representante do planeta referido.

Conhecia ainda as leis de harmonia concernentes à relação entre intervalos musicais e comprimentos de cordas, bem como a lei fundamental dos harmônicos. Considerada por Kepler, tal lei afirmava que além de emitir um som fundamental, uma corda oscilante fornecia harmônicos superiores, correspondentes aos sons fundamentais das cordas de duas vezes, três vezes, etc mais curtas que a corda inicial.

O pensador alemão conecta ainda a matemática com a música ao estabelecer correspondências entre as distâncias médias dos planetas ao Sol e as razões de frequências numa escala musical diatônica em relação ao primeiro grau.

4.4. A música segundo Descartes

Matemático e filósofo francês, nascido na pequena cidade de La Haye, René Descartes (1596-1650) desejava sistematizar todo o conhecimento segundo estruturas análogas àquelas subjacentes ao modelo axiomático da geometria euclidiana com o intuito de conquistar a certeza.

Em dezembro de 1618, o filósofo francês concluiu sua primeira obra intitulada *Compendium Musicae*. Tentando explicar a base da harmonia e da dissonância musicais em termos matemáticos, esta obra apresenta grande número de

diagramas e tabelas matemáticas que ilustram as relações proporcionais envolvidas em vários intervalos musicais. A fim de organizar sua vivência sensível, compatibilizando-a com seu conhecimento acústico-matemático-musical, Descartes estabeleceu no *Compendium Musicae* uma teoria generalizada para os sentidos, através de preliminares em forma axiomática.

Observando tais axiomas, Descartes revela um lado humanista e num certo sentido pouco cartesiano, na acepção mais comum da palavra, o que sugere uma resignificação no conjunto de idéias e relações que nos vêm à mente quando pensamos no filósofo francês e que simbolizam, portanto sua dinâmica/estrutura de pensamento.

A presença de analogias, da matemática e do pitagorismo no trabalho de Descartes, manifesta-se na formulação dos axiomas preliminares, bem como em argumentações esclarecedoras de processos harmônicos e de regras de composição em música.

No que concerne à idéia de Série Harmônica, Descartes defendia que nenhuma frequência poderia ser ouvida sem que sua oitava superior, de alguma maneira, também o fosse. Afirmando que a oitava apresentava-se como único intervalo simples produzido por um compromisso divisor da corda inteira, Descartes explicou que nenhuma frequência consonante com uma nota daquele intervalo poderia ser dissonante com a outra. Para o pensador francês, assim como existia apenas três números concordantes, havia também somente três consonâncias principais – a quinta, a terça maior e a terça menor, das quais a quarta e as duas sextas derivavam.

Na linguagem do pensador francês, a nota mais grave era mais poderosa do que a mais aguda, pois o comprimento da corda que gera a primeira contem todos aqueles pertinentes às menores, enquanto que o contrário não ocorre.

Descartes estabeleceu ainda a proibição do aparecimento do trítone no cenário harmônico musical, por corresponder à razão de números grandes e primos entre si, bem como por encontrar-se distante, no que concerne à sensibilidade auditiva humana, de qualquer das relações simples referentes às consonâncias.

4.5. A Ciência-Música em Rameau

Segundo o compositor e teórico francês, Jean Philippe Rameau (1683-1764), a música é a ciência dos sons, portanto o som é a principal matéria da música. Dividindo esta arte/ciência em harmonia e melodia, o teórico francês subordinou esta última à primeira, admitindo que o conhecimento de harmonia é suficiente para a compreensão completa das propriedades da música.

Assim como Zarlino e Descartes, Rameau obteve os intervalos consonantes dividindo a corda em até seis partes, afirmando às consonâncias, subjaziam números consecutivos e que a ordem de tais números determinava a ordem e perfeição das consonâncias.

O teórico francês dedica especial atenção à argumentação em favor da perfeição do intervalo de oitava. Rameau afirmou que a nota superior de um intervalo de oitava é réplica da inferior e que na flauta, o surgimento de tal intervalo dependia apenas da força do sopro. Introduziu em sua obra a idéia de equivalência de oitavas ao afirmar que qualquer número multiplicado geometricamente por alguma potência de 2 – representava o mesmo som. Nesse sentido, os intervalos de oitava simples, dupla, tripla, etc, apresentavam-se basicamente como mesmos intervalos, assim como a quinta, a décima segunda, etc.

A equivalência subjacente à oitava manifesta-se ainda quando o pensador francês afirma que o som fundamental gerava os intervalos de oitava e quinta, mas não o de quarta, resultante da diferença entre a oitava e a quinta. Estabeleceu um processo de obtenção da relação matemática subjacente a um determinado intervalo invertido a partir daquela correspondente ao intervalo original, multiplicando ou dividindo por 2 respectivamente o número inferior ou o superior ao intervalo em questão.

Com isso, ele se apresenta como primeiro a definir acordes e suas inversões, estabelecendo relações numéricas subjacentes às distintas dissonâncias, e observando ainda como as consonâncias concebidas por Descartes distinguidas nos acordes.

Finalizou o primeiro livro do Tratado de Harmonia explicando como relacionar frações associadas à divisões de vibrações com multiplicação de comprimentos

5. A matemática na emergência do Temperamento

O Temperamento no sentido geral significa uma escala em que todos ou quase todos os intervalos apresentam-se ligeiramente imprecisos, porém não distorcidos. Acabam por valorizar determinados intervalos em detrimento de outros, no sentido de que aos primeiros correspondem mesmas relações de frequência diferentemente dos restantes.

O temperamento pitagórico se apresenta como o temperamento mais antigo utilizado no Ocidente. No Renascimento e no início do Barroco, prosperaram temperamentos desiguais em que se priorizavam as terças maiores naturais. Surgiam ainda outros temperamentos nesse período que se mostravam superados a medida que a música se estendia as todas as tonalidades.

No final da Idade Média e início do Renascimento, a música enveredou por caminhos que intimavam seu desprendimento de concepções melódicas rumo à conquista de um caráter principalmente harmônico. A trajetória trilhada pela música ocidental conduzia a música à liberdade de modulação não apenas para tonalidades próximas, mas para distintos cenários tonais, ou seja, as composições de então, intimavam a liberdade de transposição de tonalidades.

O Temperamento não ocorreu como um processo repentino, mas se desenvolveu de diversas maneiras. No início do século XVI, como as tentativas de preencher intervalos naturais de maneira relativamente simétrica sempre se defrontavam em algum momento com a coma fatal (termo utilizado para referir-se ao pequeno resto que sempre ocorrera quando se tenta ajustar intervalos puros em um número inteiro de oitavas), obtendo-se perfeição harmônica apenas em intervalos restritos, dominava-se algum tipo de temperamento parcial especialmente nos instrumentos de tecla.

As gamas de Pitágoras e Zarlino possibilitavam a construção de escalas ligeiramente assimétricas incapazes, de responder inteiramente às necessidades culturais do final do Renascimento e início do Barroco, que intimaria, do ponto de vista das dificuldades supra-referidas, o estabelecimento de um suporte libertador para a música denominado temperamento igual.

Do ponto de vista matemático, o problema consistia em encontrar um fator f correspondente ao intervalo de semitom que após a multiplicar 12 vezes uma frequência f_0 correspondente a uma determinada nota, atingisse a sua oitava referente à frequência 2. Baseado na progressão geométrica – oitava = $2/1$; semitom = $2^{1/12}$ -, Euler pesquisou um sistema de afinação que permitiu aos

compositores modularem para e de quaisquer dos 12 centros tonais (que correspondem às 12 notas da escala temperada – do, do# = reb, re, re# = mib, fa, fa# = solb, sol, sol# = lab, la, la# = sib, si) sem distorções geradas por intervalos correspondentes que apresentavam-se até então, assimétricos em diferentes escalas. Do ponto de vista matemático, o problema representava-se pela seguinte equação:

$$f_0.f.f.f.f.....f = f_0f^{12} = 2.f_0$$

Após algumas operações algébricas simples, não é difícil concluir que o valor de f deve assumir valor $2^{1/12}$.

Portanto, as notas desta escala possuem as seguintes relações de frequência com a nota inicial:

Dó	ré	mi	fá	sol	lá	si	dó
1	21/16	21/3	25/12	27/12	23/4	211/122	

Neste ponto, caberia ainda levantar a questão de porque escolher 12 notas entre os 300 sons diferentes dentro de uma oitava possível de discriminar pelo ouvido humano treinado. Provavelmente, a divisão procedeu-se dessa maneira por respeito a uma certa continuidade à escala grega, cujo processo de construção – percurso de quintas – apresentava-se de tal maneira que o caminho aí delineado assumia, a menos de oitavas, máxima aproximação da nota inicial após 12 ciclos, referentes as 12 notas.

Percebemos assim que se a relação de frequências é simples, então, o som do intervalo correspondente é bonito, o que sugere naturalmente a dúvida a respeito da recíproca, bem como muitas outras discussões.

Conclusão

Este trabalho teve como objetivo mostrar a historia das descobertas das relações e a importância da interdisciplinaridade da matemática-música.

Percebemos que foi há 2500 anos quando ocorreu a primeira manifestação de interação da música com a matemática. Posteriormente as relações entre essas áreas passam por momentos de tensão e repouso como uma ‘música’, dinamizando com o Temperamento. Assim como as gamas apresentadas não conseguem produzir os sons referidos e talvez possamos construir novas gamas capazes de realizar tal exercício, as escalas construídas mostram-se incapazes de representar sentimentos ou cenários talvez passíveis de expressão em outros sistemas.

Neste sentido, o universo musical reserva ainda muitas possibilidades em seu processo de expansão com a construção de outras escalas, bem como linguagens mais amplas, em que possivelmente distintas habilidades possam interagir com a música e a matemática vindo a contribuir não apenas com o exemplo apresentado de escalas temperadas com um número arbitrário de notas, mas através de diversos outros meios existentes ou que possam vir a existir.

O intuito desta pesquisa foi à comparação da leitura de determinados fatos a partir das concepções teóricas, permitindo desvendar naturezas e fluxos coletivos não somente sobre o assunto em questão, mas a dinâmica de desenvolvimento científico.

Uma forma de arte nunca será objetiva e precisa a ponto de ser unanimidade, mas as simetrias e belezas observadas nas leis que governam a combinação das estruturas matemáticas usadas na descrição dos sons, em geral, e que permitem analisar o espectro sonoro de cada instrumento musical guardam estreita relação com a área da Música conhecida como Harmonia. Dessa maneira, a Física e a Matemática também são capazes de mostrar e descrever, a partir de uma abordagem objetiva, as possibilidades das infinitas combinações de sons criadas por um gênio como Johann Sebastian Bach, por exemplo. A delicadeza das construções sonoras dos grandes mestres da Música pode ser vista, ao invés de ouvida, na análise dos sons de suas obras e no perfeito equilíbrio entre as formas de ondas instintivamente combinadas para formá-las. Ao ouvir algumas das "obras canônicas" dos compositores famosos, podemos considerá-los privilegiados por serem capazes de expressar e/ou criar emoções e "imagens sonoras" tão belas, algumas perpetuadas através de séculos, que puderam ser transmitidas a outros através da arte da Música. Ao mesmo tempo, ao estudar a História da Ciência, vemos que, não menos privilegiados são alguns dos físicos e matemáticos mais importantes da História. A eles coube o prazer de descobrir leis e fenômenos naturais, nos deixando ferramentas poderosas para o entendimento dessa mesma Natureza. É a perfeição dessas ferramentas e leis que nos permite olhar a Música sob outra óptica, um prisma diferente, unindo os mundos maravilhosos da Arte e da Ciência.

Referências Bibliográficas

- ABDOUNUR, Oscar João. *Matemática e Música: O pensamento analógico na construção de significados*. São Paulo, 2002, 2ª Edição. Editora Escrituras.
- BOYER, Carl, *História da Matemática*, São Paulo, 1974, Ed. Edgard Blucher
- EVES, Howard, *Introdução à história da matemática*, São Paulo, 1986, Ed. Edgard Blucher

Sites Consultados

- <http://members.tripod.com/caraipora/assuntos.htm>
- <http://www.music-center.com.br/escalas.htm>